Проф. др Мирко Дејић[1]
Учитељски факултет у Београду
Проф. др Крстивоје Шпијуновић
UDK: 371.279.6
Учитељски факултет у Ужицу
ISBN 978-86-7372-171-2, 18 (2013), p.96-111
Др Саво Ћебић[2]
Стручни рад
Висока техничка школа струковних студија, Зрењанин

НЕСТАНДАРДНИ ЗАДАЦИ У ФУНКЦИЈИ ИДЕНТИФИКАЦИЈЕ МАТЕМАТИЧКИХ СПОСОБНОСТИ

Резиме: Теорије које се баве математичким способностима истичу различите концепције и карактеристике тих способности. Такође, постоје и различити начини да се одреди степен математичких способности за посматрану карактеристику (геометријске способности, аритметичке способности, апстраховање итд.). У раду обрађујемо методологију идентификације математичких способности помоћу нестандардних задатака. Деци се задаје сет сродних нестандардних задатака за чију израду су потребне одређене математичке способности и зависно од њихове израде одређују различити степени математичких способности: изузетне, високе, добре, средње и слабе. У раду још обрађујемо појмове везане за математичке способности, неке методе откривања математичких способности, нестандардне задатке и методологију њихове израде.
Кључне речи: Математичке способности, Нестандардни задаци, Даровитост, Математика, Израда задатака.

Увод

Даровит ученик за математику јесте онај ученик који поседује изузетне, натпросечне способности и интересовања за њу. Постоје многе специфичне способности које карактеришу надареност за математику у целини, али и за посебне области. Издвојићемо неке: моћ апстраховања,ерисање апстракцијама; просторни фактор (геометријска интуиција); логичко расуђивање; гипкост, проналазачко мишљење; математичка интуиција; нумерички фактор, комбинаторно, дедуктивно и индуктивно мишљење; коришћење математичке симболике; умење примењивања математичке шематизације; склоност и интерес за математику; усвајање математичких појмова; проналажење различитих и оригиналних решења проблема; постављање нових проблема (еластичност и креативност мишљења); употреба алгоритама; осећај за узрок и последицу; способност образовања и праћења каузалног ланца чињеница; способност расуђивања о везама итд. (Гусев, В.А., 2003), (Дејић, М., 1997, 2006, 2007).

---

[1] mirko.dejic@gmail.com, mdejic@panet.rs
[2] cebics@gmail.com

Издвојени параметри математичких способности и њихово даље прецизирање условљавају избор средстава која омогућавају да се дефинишу параметри математичких способности ученика и одреди њихов ниво. У математици постоји више начина за идентификацију математичких способности. Укратко ћемо представити неке начине, а детаљније разрадити методу идентификације математичких способности помоћу тзв. нестандардних задатака. Они у већини случајева имају садржај који је приступачан и разумљив ученицима, а нарочито на почетном нивоу учења математике. У структури тих задатака налазе се, на пример, параметри математичких способности као што су досетљивост, оштроумност, знатижеља, духовна радозналост и сл.

Неки начини идентификације математичких способности и даровитости за математику

Идентификација математичких способности представља озбиљно подручје изучавања многих области. Пре свега то је математичка, психолошка и педагошка проблематика. Уз све те науке не треба изоставити и посматрање деце од стране учитеља, наставника и родитеља.

Ради дијагностиковања и прогнозирања математичких способности може се користити метод тестова, и то оних тестова који у највећој мери откривају математичке способности за одређе области (нумеричке, логичке, геометријске итд.). Мана нашег школског тестирања јесте да тестове обично праве сами наставници, према неким својим осећајима да они мере баш то зашто их праве (знање, способности, квалитет знања, трајност итд.). Мишљења смо да за откривање математичких способности треба користити стандардизоване тестове које израђују стручњаци и проверавају на великом броју ученика, статистички утврђују стандард сваког теста и одређују му начин бодовања.

Веома једноставан начин утврђивања математичких способности износи Металски (1989). Он сматра да је важан показатељ математичких способности однос ученика према тежим (нестандардним) задацима. Тај однос може да се одреди следећим питањима:

- Волиш ли да решаваш тешке задатке?
- Тражиш ли помоћ приликом решавања тешких задатака?
- Ако тежак задатак ниси решио данас, да ли га решаваш сутра?

Одговара се са ДА или НЕ. Циљ се не саопштава ученицима. При обради анкете могу се искристализовати приближно три нивоа школских математичких способности:

Висока: ДА, НЕ, ДА.

Обична: НЕ,НЕ,НЕ или НЕ,ДА,НЕ .

Повишена: Сви остали одговори.

Метељски даје још један, софистициранији, начин за идентификацију математичких способности.

Завршне оцене напредовања ученика у сваком разреду изражавају не само ниво њиховог знања, него и способности изучавања појединог предмета. Те оцене је могуће искористити у својству приближних квантитативних показатеља способности, ако се унесу корекције изазване утицајем учитеља. Ниво успешности (напредовања у учењу) по предмету (и заинтересованости за њега) за сваког појединачног ученика је специфичан, но он се разликује од нивоа одговарајуће индивидуалне способности ученика у делу интереса (позитивног или негативног), који је допринос учитеља. Потребно је отклонити тај део и доћи до приближног показатеља измерених способности узимајући у обзир испољавање интереса ученика према учењу појединог предмета.

Свим ученицима разреда предлаже се да распореде n (на пример, пет или седам) изучавајућих предмета, укључујући и математику, у поредак опадајућих интереса према њима. Избројимо колико је ученика ставило математику на прво место, колико на друго итд, па израчунамо збир места за математику S и условно средње место S / N , где је N број ученика у разреду. За фактичко средње место међу n предмета узимамо $0.5(n+1)$. За коефицијент корекције (поправке) за математичке оцене ученика узимамо израз:

$$K = \frac{\frac{S}{N} - 0.5 \cdot (n+1)}{0.5 \cdot (n+1)}.$$

Тражени показатељ A способности за изучавање појединог предмета изражава се кроз завршну оцену B коју је утврдио (дао) предметни наставник емпиријском формулом

$$A = B + KB = B \cdot (1+K),$$

или

$$A = \frac{2S}{(n+1) \cdot N} \cdot B.$$

Ако већина ученика разреда стави математику на прва места, то ће збир места бити релативно мали. Условно средње место математике мање је од фактичког средњег места; њихова разлика и коефицијент K биће негативни и показатељ A биће мањи од оцене B за тај део за који се интерес за математику показао већи од средњег интереса ученика за друге предмете. Аналогно, позитивна вредност за K доводи до одговарајућег повећања показатеља A у односу на оцену B у виду смањеног интересовања разреда за математику у односу на став учитеља.

До сада смо сматрали да при вештом предавању сви школски предмети имају приближно једнаке могућности изазивања интресовања код ученика.

Ако вишегодишње израчунавање показатеља A испољава релативну стабилност или теденцију раста, то тај показатељ може се прихватити за приближну меру развоја школских математичких способности ученика и одредити степен њихове склоности ка математици; у другим случајевим неопходно је установити и одстранити узроке регреса (назадовања).

Оцене такође представљају важну компоненту у одређивању математичких способности појединих ученика. Оне могу да се искористе за грубу квантитативну одредбу способности ученика, при чему се искључује субјективан утицај учитеља.

Како се највећи део наставе математике одвија путем израде математичких задатака, изнећемо нека карактеристична питања у вези са тим задацима, која ће омогућити наставнику да идентификује децу даровиту за математику:

Да ли је ученик решио задатак на више начина?
Да ли је употребио ново правило или закон?
Да ли је увео нове ознаке?
Да ли је уочио немогуће случајеве?
Да ли је предвидео све случајеве?

Како користи мисаоне операције?

Како врши проверу резултата, уме ли да формулише инверзни задатак?

Решава ли задатак аналитичком методом?

Како решава нестандардне задатке?

Да ли самостално попуњава празнине у знању приликом решавања математичких проблема?

Тражи ли помоћ приликом решавања задатака?

Да ли је истрајан у решавању задатака?

Да ли користи олакшице при решавању задатака?

Да ли даје нестандардна решења?

Да ли је решење сажето?

Колико брзо решава задатке?

Показује ли изразиту жељу да први реши задатак?

Примењује ли раније стечена знања, која му помажу да одступи од шаблонског решавања задатка?

Да ли користи широку лепезу идеја стечених у ранијим решавањима задатака?

Колика је трајност знања, може ли у одложеном времену да реши исти или сличан задатак?

Уме ли, за сопствене примене, да трансформише знања стечена у школи?

Како уопштава и примењује резултате задатка, уме ли да нађе слично у различитом?

Може ли сам да поставља проблеме?

Има ли изражену досетљивост приликом решавања задатака?

Има ли осећај задовољства при решавању тежих задатака?

Уме ли да користи цртеже и моделе?

Трага ли у збиркама и књигама да би решио задатак?

Како примењује познате алгоритме у конкретној ситуацији?

Доводи ли до краја замишљен план решења?

Да ли брзо уочава нове односе?

Уме ли да издвоји битне од небитних елемената у задатку?

Да ли брзо схвата задатак и поставља план за решавање?

Тежи ли ка рационализацији у решавању?

Има ли изражену љубав према решавању тежих и нестандардних задатака?

Показује ли отпор према решавању рутинских задатака?.

Иако листа питања није исцрпљена, може у великој мери да помогне учитељу да идентификује децу даровиту за математику. Треба имати у виду да су и даровити различити међу собом. Неко ће брже, а неко спорије да решава неки задатак, нечија знања ће бити трајнија, нечија решења сажетија итд. Ако је на већину питања одговор позитиван, у дужем периоду праћења рада, наставник је успео да идентификује потенцијално даровито дете за математику. Даље процене треба спровести са психологом и педагогом.

Интересантан метод идентификације математичких способности даје Гусев (2003). Математичке способности се идентификују помоћу израде нестандардних задатака. Деци се задаје сет сродних нестандардних задатака за чију израду су потребне одређене математичке способности и зависно од њихове израде одређују различити степени математичких способности: изузетне, високе, добре, средње и слабе.

Нестандардни задаци

Нестандардни задаци у литератури често носе различита имена (синониме): *занимљиви задаци, ваннаставни задаци, мозгалице, главоломке, логички задаци* итд. Ипак, сваки од ових назива представља само део једне целине, коју називамо *нестандардни задаци*. У даљем излагању покушаћемо да ближе одредимо њихово значење.

Неколико аутора врши класификацију нестандардних задатака:

Г. Ленгауер (1940) наводи групе различитих занимљивих (нестандардних) задатака, и то:

1. Задаци који не захтевају или скоро да не захтевају никаква математичка знања и засновани су на оштроумности.
2. Задаци који поред бистрог ума захтевају и елементарна математичка знања или присећање онога што је раније у школи научено.
3. Питања и задаци који имају за циљ проверу и прецизирање математичких знања ученика. То су углавном неочекивана поређења и закључци, понекад парадокси и сл. Група ових задатака се дели на три дела према разредима у основној и средњој школи.
4. Група задатака за љубитеље тешких проблемских математичких задатака. За решавање ових задатака потребна је математичка припрема, али она не прелази обим школског знања.
6. Задаци-шале, математички трикови и задаци за забаву.

Б.Л. Кордемски (1958) издваја две категорије ваннаставних (нестандардних) задатака.

Прва категорија: Задаци блиски школској настави математике, али тежи – тип задатака са математичких такмичења.

Друга категорија: Занимљиви математички задаци. Ту спадају задаци који су веома шаролики по садржају. Немају директног контакта са школским програмом и по правилу не захтевају велику математичку припрему за израду. На основу истраживања Б.Л. Кордемског може се извршити класификација задатака друге категорије према садржају у складу са групама сличних операција – радњи које се користе за решавање задатака са истом темом:

1. „Тешки задаци“ (решавање је отежано, али може бити остварено средствима математичке оштроумности).
2. „Геометрија са шибицама“ (конструисање модела фигуре од шибица).
3. „Седам пута мери, једном сеци“ (мењање фигура помоћу сечења).

4. „Вештина увек налази примену“ (елементарно-техничка и практична питања, чије решавање захтева математичко размишљање).
5. „Са алгебром или без ње“ (садржај није битан, операционо језгро: алгебарски пут решавања или било који други, али увек има нека „фора“ или у самом начину или у упоређивању начина решења).
6. „Математика скоро без рачунања“ (операционо језгро: операција скоро да нема, али за решавање је потребно добро расуђивање).

Из наведених класификација видимо да је спектар задатака који носе назив “нестандардни” велики. Ти задаци се разликују од оних који се налазе у уџбеницима и задатака који се свакодневно обрађују на наставним часовима. Најчешће се раде на додатној настави, по секцијама и клубовима. Незаобилазни су на математичким такмичењима, на којима није главни циљ да деца покажу математичко знање, већ математичке способности. Оно што је заједничко за све њих то је њихова занимљивост, проблемски карактер, неочекиваност решења, загонетност, заводљив текст, задаци излазе из оквира класичних школских задатака-нешаблонски задаци (захтевају нешаблонска решавања), често не захтевају нека значајнија математичка знања, већ се ослањају на логичко мишљење, интуицију и “здрав разум”. Ови задаци су корисни за развијање математичког мишљења, одржавање сталног интересовања за математику, али нису обавезни, користе се по нахођењу и потреби наставника.

Било како да направимо поделу, она је уситњавање једне опште подела на: аритметичке, алгебарске и геометријске задатке у зависности од материјала којим се оперише – бројеви, алгебарски изрази или фигуре.

Размотримо сада значај решавања нестандардних задатака. Најпре треба истаћи посебан значај настандардних задатака за развој суштинских елемената математичког мишљења ученика, математичке иницијативе која се испољава кроз жељу ученика да сам схвати проблем, кроз тежњу да самостално пронађе начине и средства за решење задатка; оштроумности, логичности, досетљивости, флексибилности и критичности ума. Уз све набројано не треба заборавити и снажну мотивациону страну нестандардних задатака. Значај нестандардних задатака према њиховим типовима је следећи:

Магични квадрати: Ради утврђивања сабирања бројева могу се користити магични квадрати. Њихово решавање је за децу веома интересантно, јер деца сасвим самостално истражују и комбинују и радују се успешном решењу. Жеља да се направи магични квадрат потискује у други план осећаје тешкоће и обавезе, који често прате наставу која се не освежава и оплемењује подстицајима.

Занимљиве бројевне једнакости: Занимљиве бројевне једнакости могу да буду снажно средство за самостална откривања од стране ученика. Ови задаци су за ученике проблемског карактера што има несумњиву педагошку вредност. Задаци овог типа су корисни за развијање аналитичког мишљења. Такав задатак би био:

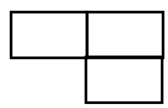
Сума неких бројева једнака је производу тих бројева. На пример 2+2=2·2; 1+2+3=1·2·3; 1+1+2+4=1·1·2·4 итд. Наставити: __+__+__+__+__+__=__·__·__·__·__·__ итд.

Задаци са необичним одговорима: За развијање мишљења код ученика велику улогу играју задаци са необичним одговорима. На први поглед задаци изгледају парадоксално, без одговора. Ипак, уз довитљивост и досетку ученици могу да их реше. Такв је задатак: У корпи се налазе три јабуке. Мајка их је поделила тројици синова. Свако је добио по једну јабуку, а једна је остала у корпи. Како је то могуће? (Један син је добио корпу са јабуком).

Шаљиви задаци: Ови задаци се, наизглед, лако решавају, али обично бивају погрешно решени. Забавне су природе и у великој мери развијају интересовање за математику. Игром речи, обично се ученици наводе на погрешан пут. После давања погрешног одговора ученика и поновног решавања ученици улажу већи напор и пажњу, што доприноси да се развију њихове стваралачке способности. Задаци у великој мери развијају и логичко мишљење. Такви би био задатак: Колико рођендана има мајка четворо деце?

Математичке приче: Математичким причама ствара се проблемска ситуација која ће да заинтересује ученике. То су обично приче које имају неки животни садржај који окупира ученике, али и математичку ситуацију коју они треба да разреше. Кроз причу ученици долазе до нових знања. Пожељно је да прича има своје име да би је ученици дуже памтили.

Занимљива геометрија: Да би се развиле геометријске способности и интерес за решавање геометријских задатака користе се задаци из области занимљиве геометрије. Такав би био задатак: Не дижући оловку са папира, поделите фигуру на слици тако да добијете 6 једнаких троуглова.



Математичке игре: Значајну улогу за развијање математичког мишљења имају математичке игре. Нарочито треба истаћи тзв. стратегијске игре које играју два играча. Један, ако зна стратегију игре, без обзира на потезе другог играча, увек може да победи или оствари нерешен резултат. Математичке игре у великој мери развијају мисаоне операције, пре свега анализу, синтезу и упоређивање. У разредној настави није потребно децу учити стратегији доласка до победе, која је често веома компликована. Децу треба пустити, да, играјући се, сами траже стратегију. На тај начин деца развијају своје стваралачке способности, аналитичко и комбинаторно мишљење, истрајност, жељу за дружењем итд. Таква је на пример игра "икс-окс".

Погађање броја: Ученицима у разредној настави веома су интересантни и корисни задаци у којима се погађа број. Сви ти задаци заснивају се на својствима једначина.

Ребуси: Ради запамћивања математичких појмова могу се решавати математички ребуси.

Игре шибицама: Игре шибицама састоје се у следећем. Од шибица се направи нека геометријска фигура и од ученика захтева да, премештајући неколико шибица, добију неку нову геометријску фигуру. У решавању таквих проблема развија се интелигенција и машта. Сваки решен проблем јесте својеврсно откриће, што изазива велику радост и љубав према решавању проблема.
Нумерички лавиринти: Нумерички лавиринти представљају мрежу путева на којима се налазе бројеви. Ученици траже онај пут на коме је збир бројева једнак задатом броју. Нумерички лавиринти представљају добро средство за утврђивање сабирања бројева (усмено или писмено) и то на интересантан начин. Тражећи одговарајући пут ученици се васпитавају да самостално раде, стварају и буду стрпљиви. Међу ученицима може да се спроведе такмичење, а победник је онај ученик који први пронађе тражени пут.
Илузије: Често се дешава да при посматрању ″одока″ чинимо грешку. Ученицима треба на конкретним примерима указивати да је при раду, нарочито при упоређивању величина, потребно да се добро осмотри, јер, око може понекад да нас превари.

Нестандардни задаци омогућавају да се увиди проблем, мобилизира специјално знање, изводе закључци, употреби симболика, изврши проверавање итд. Структура решавања нестандардних задатака састоји се у њиховој анализи, схематском записивању, тражења пута решавања (план), решавање, провера решења, формулисање одговора, анализа решења. Све ово је у уској вези са стваралачким процесом за који су неопходне развијене математичке способности. “Структура стваралачког процеса и структура решавања задатка се поклапају” (Дрозина, В.В. и др., 2012:33).

Код нестандардних задатака суштински услови који воде ка решењу су маскирани небитним околностима које усмеравају размишљање у одређеном правцу. Психолошка страна решавања нестандардних задатака подразумева улогу домишљатости као органског дела процеса мишљења. Домишљатости као начину решавања мозгалица претходи детаљна анализа, проналажење битних информација у задатку. На тај начин, решење мозгалица је резултат прецизне анализе услова, у току које се и траже путеви решења.

При прављењу плана за решавање нестандардних задатака користе се *директне* и *индиректне* методе. Оне могу да се комбинују, зависно од задатка. Решавање задатака подразумева успостављање везе између датих и тражених података. Ако се те везе утврђују непосредним методама математичког мишљења, уз коришћење оригиналног проблема (проблем се не замењује моделом), онда се говори о директним методама решавања математичких проблема. Најчешће су то: синтетичка, аналитичка и аналитичко-синтетичка.

Синтетичком методом сазнања повезује се оно што је дато (што се може повезати) и тражи оно што је непознато. Резоновање синтетичком методом је облика: *Знамо, шта можемо добити*?

Код решавања задатака *аналитичком* методом претпостави се да је нађено оно што се тражи, затим се доводи у везу са оним што је дато, што је познато и из тога изводи закључак. Резоновање код аналитичке методе је облика: *Шта треба знати да би се добио одговор*?

Анализу обавезно прати синтеза. Аналитичком методом трасирамо пут од траженог ка датом, а после следи реверзибилан поступак, врше се рачунања или означавају рачунске радње и њихов редослед, што представља синтезу. Због тога, код решавања задатака не треба говорити о чисто аналитичкој, већ о *аналитичко-синтетичкој* методи. У пракси се најчешће аналитичко-синтетичка метода састоји у томе да се дати задатак растави на више лакших (простијих), који се затим решавају синтетичком методом.

Индиректне методе решавања задатака подразумевају прављење одговарајућих модела. Моделовањем ми уместо оригинала посматрамо његову замену - модел. У даљем процесу испитује се модел. Законитости које важе у оквиру модела представљаће законитости оригинала. Најчешће се користе: *метода дужи, метода таблица, метода правоугаоника, метода Веновог дијаграма, метода фокусног дијаграма* (видети Дејић, М., 2010).

Истакнимо чињеницу да у школској пракси није предвиђено решавање нстандардних задатака непосредно на часу (није унето у програм, нема препорука у методичкој литератури, нема таквог материјала у уџбеницима). Наставник по свом нахођењу може да користи или не користи такве задатке, али за већину људи које занима математика први јаки утисци о тој науци су повезани са задацима или целим књигама „забавног“ карактера.

Нестандардни задаци у функцији откривања математичких способности

Гусев (2003) разрађује детаљно методу за откривање математичких способности помоћу израде нестандардних задатака. Он прави сетове нестандардних задатака, одређује које способности они идентификују и затим одређује степен тих способности зависно од начина израде задатака. При одабиру задатака, намењених за идентификовање параметара математичких способности води се рачуна о следећим захтевима:

- задаци морају бити занимљиви, доступни ученицима, ако је могуће треба да се ослањају на наставни програм, да се разликују од обичних задатака који постоје у уџбеницима математике;
- операције које се налазе у структури решавања задатка морају одговарати природи параметара математичких способности ученика који треба да се идентификују;
- задаци морају бити груписани према врсти размишљања.

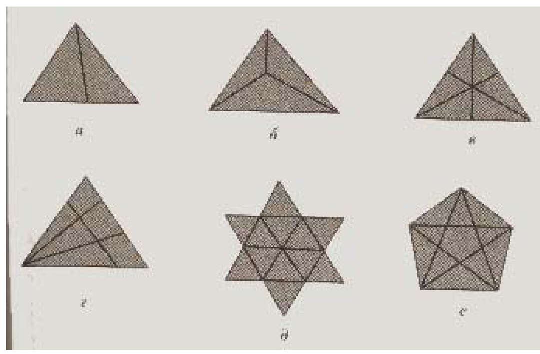
Нестандардни геометријски задаци у функцији откривања математичких способности

При решавању занимљивих геометријских задатака не испољавају се, наравно, сви параметри математичких способности. Понуђене групе занимљивих геометријских задатака усмерене су првенствено на идентификовање *„геометријског опажања“*, тј. вештине да се на цртежима види не само оно што „упада у очи“, већ све што се на њима налази“.

Развијено „геометријско опажање“ претпоставља вештину да се:
- погледом обухвати цео цртеж и да се примете односи између елемената на цртежу који могу бити потребни за решавање датог питања;
- види потребан просторни облик и да се он издвоји из разноврсних склопова са другим геометријским фигурама;
- утврди зависност између елемената фигура;
- замисле геометријски објекти;
- у мислима измени фигура итд.

Да би се идентификовалала способност геометријског опажањања деца морају да имају способност да анализирају и синтетишу. Такође, важна компонента математичких способности, која је неопходна при геометријском опажању јесте и алгоритамска култура.

Показаћемо сада како Гусев (2003) на сету задатака са пребројавањем троуглова открива геометријске способности код деце. Задатак гласи: Избројте *троуглове на следећој слици*:



Квантитативне карактеристике које користи Гусев при процени геометријских способности су:
- геометријског опажања – у којој мери је потпуно и прецизно ученик видео тражене фигуре; број издвојених фигура из позадине;
- аналитичко-синтетичке активности – постојање и број идеја при решавању задатака и избор најрационалнијег начина решавања;
- алгоритамске способности – број корака који доводи до тачног решења.

Слика а)

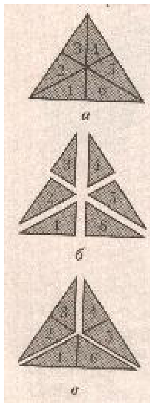
1. Ако ученици уоче да је велики троугао састављен из два мала и да их је укупно 3 - *1 бод*.
2. Ако не уоче неки од три троугла добијају *0 бодова*.

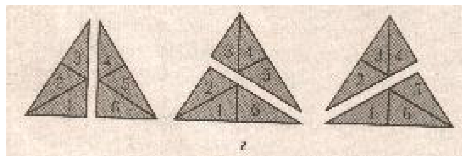
Слика б)

1. Велики троугао има три мала, укупно 4. За ово решење даје се *1 бод*, било које друго *0 бодова.*

Слика в)

Посматрајмо следеће слике везане за троугао на лици в):





Расуђивање

1. На сл. *а*) видимо 1 троугао састављени из 6 малих.
2. На слици б) видимо све мале троуглове, њих 6.
3. На слици *в*) видимо све троуглове који се састоје из 2 мала (3 троугла)
4. На сл. *г*) су троуглови који се састоје из три мала троугла (6 троуглова).

Укупно има 16 троуглова.

Бодовање

1.Ако ученици уоче алгоритам и дају тачан одговор *2-бода.*

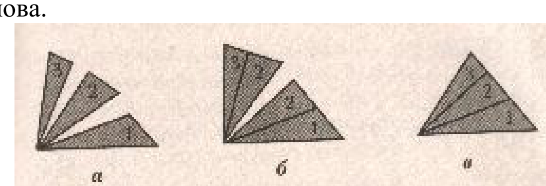
2.Задатак решавају без алгоритма (броје онако како их виде, али избројали су више од седам троугла) – *1 бод*.

3. При бројању, ученици су нашли мање од седам троуглова, тј. не увиђају више троуглова у једном - *0 бодова*.

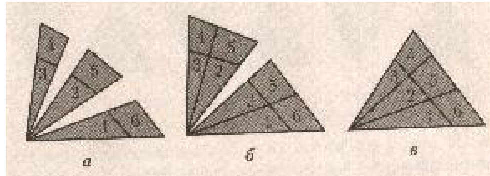
Слика г)

Расуђивање

1. Уочавају се троуглови у доњем делу слике, има их 6. Сви се састоје само из троуглова.



2. Ако се дода и горњи део, добијају се нови троуглови који се састоје из троуглова и четвороуглова, решење је аналогно као у претходном случају, ових троуглова има 6.



У к у п н о: (3+2+1)+(3+2+1) = 12.

Бодовање

1. Ученици су пребројали све троуглове помоћу алгоритма (није битан избор алгоритма) - *3 бода*.

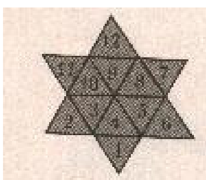
2. Ученици за решавање примењују алгоритам, али не уочавају све троуглове - *2 бода*.

3. Ученици пребројавају само троуглове на сликама а) и в), а не виде и оне који се прожимају, тј. б) - *1 бод*.

4. Ученици на сликама виде мање од 7 троуглова - *0 бодова*.

Слика д)

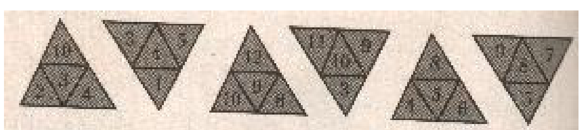
Као и у другим задацима и овде постоји опасност да се не уоче троуглови ако немамо алгоритам, зато је добро означити мале троуглове цифрама, као на слици.

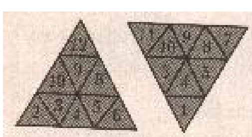


Расуђивање

1. Бројимо мале троуглове, има их 12.

2.Уочавамо троуглове који се састоје из 3 мала троугла, два не могу, чине ромбове. Таквих троуглова има 6, видимо их на следећој слици.





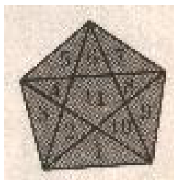
Четири, пет, шест, седам и осам малих троуглова не образују троуглове.Троуглова састављених из 9 малих троуглова има – два.
У к у п н о: 12+6+2=20.

Бодовање

1. Ученици решавају по алгоритму и пребројавају све троуглове - *3 бода*.
2. Ученици су уочили све троуглове, али насумице, без алгоритма - *2 бода*.
3. Ученици су увидели претходне случајеве 2) (по 4 мала троугла) и 3) (по 9 малих троуглова), али су у пребројавању испустили неки - *1 бод*.
4. Ученици који нису увидели случајеве 2) и 3) - *0 бодова*.

Слика е)

Ово је нсјкомпликованији задатак у низу датих. На слици уочавамо троуглове и петоуглове. Најпре треба нумерисати све елементе великог петоугаоника:



Расуђивање

1. Фигура се састоји из 10 малих троуглова (1-10).
2. Десет троуглова састоји се из 2 мала троугла: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 10-1.
3. Пет троуглова, састоји се из 3 мала: 1-2-3, 3-4-5, 5-6-7, 7-8-9, 9-10-11.

4. Пет троуглова састоји се из два мала троугла и једног петоугла: 2-11-6, 4-11-8, 6-11-10, 8-11-2, 10-11-4.

5. Пет троуглова састоји се из 4 мала троугла и петоугаоника: 1-2-10-11-6, 3-4-2-11-8, 5-6-4-11-10, 7-8-6-11-2, 9-8-10-11-4.

У к у п н о: 10+10+5+5+5=35 троуглова**.**

Бодовање

1. Ученици су уочили све троуглове, предложили алгоритам пребројавања - *4 бодова*.
2. Ученици су увидели троуглове описане у тачкама 1), 2), 3), 4) или 1), 2), 3), 5) и понеки троугао описан у тачкама 4) и 5) - *3 бода*.
3. Ученици су уочили троуглове описане у тачкама 1), 2), 3), али нису уочили ни један троугао, описан у тачкама 4) и 5) - *2 бода*.
4. Ученици су уочили по неки троугао из 1), 2), 3), али не све - *1 бод*.
5. Ученици су уочили само троуглове описане тачком 1) - *0 бодова*.

Одређивање математичких способности

Максимални број бодова које ученици могу добити при пребројавању троуглова је 14. Анализа расуђивања ученика при решавању ових задатака даје рејтинг способности сваког ученика:

Изузетне (13-14 бода). Расуђивање ученика ове групе одликује се самосталношћу и оригиналношћу. Анализирају цртеж по тачном критеријуму. За основу анализе најпре уочавају принцип рашчлањавања фигуре на саставне делове, одређују број тих фигура, затим добијене фигуре постепено групишу у растућем поретку, чиме избегавају да поново броје фигуру коју су већ бројали. За решавање задатака тог типа ученици троше максимално 10 минута. Један исти задатак могу решити на више начина, разматрајући различите путеве бројања. У већини случајева бирају најрационалнији пут решавања.

Високе (11-12). Ученици ове групе дају добру идеју за решавање, али не долазе увек до краја, што им онемогућава максимални број бодова. Задатке решавају око 15 минута. Задатке решавају са интересовањем.

Добре (9-10). Иако задатке решавају помоћу алгоритма јављају се грешке при уочавању фигура. За решавање користе 16 до 20 минута.

Средње (5-8). Анализа цртежа представља мисаоно понављање практичне делатности. Цртеж рашчлањавају на фигуре које могу добити ако га практично режу. На тај начин тешко уочавају фигуре састављене из више фигура, при чему једна припада разним фигурама. За решавање троше више од 20 минута. Немају математичке инвентивности, мада су заинтересовани за решавање.

Слабе (0-4). Расуђивање ове групе значајно се разликује од расуђивања осталих група. При решавању првог задатка не уочавају велики троугао, не уочавају сложеније, који се састоје из више мањих, нису у стању да одреде да ли су дату фигуру већ уочили или нису. Задатак решавају сасвим споро, дуго посматрају сваку слику. На решавање утроше више од пола сата. Брзо губе интерес и жељу да наставе да решавају задатак.

Закључак

Изнет је један, наизглед једноставан, начин идентификовања математичких способности. Ипак, из изнетог ми можемо сагледати сву сложеност ове методе. Истраживач мора добро да познаје класификацију математичких способности, да зна теорију о нестандардним задацима, начин њиховог решавања, прављење сета сличних нестандардних задатака, одређивање способности које су потребне за решавање понуђених задатака итд. Важно је утврдити критеријум за бодовање решења. Као што смо видели процењује се и бодује не само тачно решење, већ и број корака долажења до тог решења, уочавање проблема, правилно кретање ка циљу, иако се по некад не долази до њега, ослањање на решење претходног задатка у сету, уочавање алгоритма итд. На крају се врши одређивање степена способности према расподели бодова. Мишљења смо да је изнети метод добар, али да је потребно добијене резултате верификовати још на неки начин. На пример, преко одговарајућих тестова способности и затим одредити корелацију.

Задаци, који се дају деци да их решавају, као што смо видели, не захтевају специјално математичко знање, већ само математичке способности. На тај начин они стварно мере оно зашто су предвиђени – одређене математичке способности.

За одређивање геометријских способности могу се користити и интересантни задаци са шибицама. У сетовима ових задатака посматрају се низови задатака у којима се премешта известан број шибица и добија одређен број фигура, саставља известан број фигура из датог броја шибица, узима одређен број шибица и мења број посматраних фигура итд.

За одређивање логичких способности могу да послуже задаци са пресипањем. Такви су, на пример,следећи задаци:

- Имамо 2 суда од 2 и 3 л. Како помоћу њих добити 1 литар течности?
- Имамо 2 суда од 3 и 5 л. Како помоћу њих добити 1 литар течности?
- Имамо 2 суда од 5 и 7л. Како помоћу њих добити 1 литар течности?
- Имамо 2 суда од 3 и 5 л. Како помоћу њих добити 4 литар течности?
- Имамо 2 суда од 5 и 7 л. Како помоћу њих добити 6 литар течности?
- Имамо 2 суда од 4 и 9л. Како помоћу њих добити 6 литар течности?

Познати су и задаци са мерењем куглица итд.

Литература:

- Гусев, В.А. (2003): *Психолого-педагогические основы обучения математике*, Москва, Вербум-М.
- Дрозина, В.В., Дильман, В.Л., Дрозин, Д.А. (2012): *Как научить младших школьников решатые задачи*, Москва, URSS.
- Дејић, М (1997): *Математичке способности и њихово развијање,* Зборник 3: 172-178, Вршац, Виша школа за образовање васпитача.
- Дејић, М. (1999): *Математички задаци у процесу идентификације даровитих за математику у разредној настави,* Зборник 5:333-338, Виша школа за образовање васпитача - Вршац и Университатеа «Банатул» - Тимисоара.
- Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2007): *Како једноставно дијагностиковати математичке способности ученика*, Зборник 13:74-84, Висока школа струковних студија за образовање васпитача "Михаило Палов", Вршац.
- Дејић, М., Банђур, В. (2006): *Концепције математицких способности и њихова класификација*, Зборник 12:398-411, Виша школа за образовање васпитача-Вршац, Универзитет «Тибискус»-Темишвар.
- Дејић, М., Егерић, М. (2010): *Методика наставе математике*, Београд, Учитељски факултет.
- Кордемский, Б.Л. (1958): *Очерки о математических задачах на смекалку*, Москва, Учпедгиз.
- Ленгауэр, Г (1940): *Зал математических развлачений в доме занимательной науки*, Математика в школе, 1940, бр. 6.
- Металскиј Н.В. (1989): *Пути совершенствованиу обученоу математике,* Минск, Университетское.

Summary: Theories dealing with mathematical abilities emphasize various conceptions and characteristics of these abilities. There are also different ways to determine the level of mathematical abilities of observed characteristic (geometrical abilities, arithmetical abilities , abstracting, etc.). Methodology of mathematical abilities identification by means of non-standard tasks has been elaborated in this work. Children are given a set of related non-standard tasks for whose solution certain mathematical abilities are needed and different levels of mathematical abilities are determined depending on their working out: exceptional, high, good, medium and poor. The ideas connected with mathematical abilities, some methods of revealing mathematical abilities, non-standard tasks and methodology of their solutions have also been elaborated in this work .

Key words: Mathematical abilities, Non-standard tasks, Talent, Mathematics, Solving the tasks.