

## ЗАХТЕВИ НА ВИСОКИМ НИВОИМА ПОСТИГНУЋА ЕКСТЕРНИХ ТЕСТИРАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ (*TIMSS* и *PISA*)

---

**Апстракт:** Математичка писменост која се евалуира PISA тестирањем превазилази оквире знања која су потребна искључиво за изучавање математике као апстрактне науке. Укључује способност појединца да интерпретира математику у различитим контекстима, да резонује математички, као и да користи математику при објашњавању и предвиђању феномена. Са друге стране, TIMSS тестирањем омогућава се интернационално поређење са циљем побољшања праксе у подучавању и учењу математике. Како два тестирања имају различите циљеве, другачији су и захтеви који су постављени пред ученике са високим постигнућима на овим тестирањима. На PISA тестирању захтеви су везани за употребу математичких модела, стратегија решавања проблема, коришћење различитих репрезентација, комуникацију начина резоновања, итд. Захтеви TIMSS тестирања су у ближој вези са познавањем математичких садржаја, али такође укључују когнитивне вештине и стратегије. Циљ овог рада је описивање и поређење захтева на високим нивоима постигнућа ових тестирања, као и анализирање постигнућа ученика на високим нивоима у Србији.

**Кључне речи:** тестирања из математике, високо постигнуће, математичка писменост, TIMSS, PISA.

---

### Увод

Последњих година фокус истраживача у математичком образовању померио се на текстуалне задатке који су често названи контекстуалним проблемима и укључују процес моделовања. Дидактичка путања решавања текстуалних задатака (и контекстуалних проблема) описана је на следећи начин: 1. прелазак са конкретних ситуација или ситуација изражених природним језиком на алгебарски код, 2. анализа релација између варијабли базираних на манипулацији алгебарским изразима (синтаксички ниво), 3. интерпретација конкретних ситуација у светлу резултата рада над алгебарском синтаксом (Sfard, 1991). Блум и Лајс (Blum, Leiss, 2007) допуњују ову путању коју називају процесом моделовања и прецизније дефинишу њене кораке на следећи начин: 1) изградња интерног модела проблемске ситуације који одражава разумевање елемената и односа, 2) трансформација овог ситуационог модела у математички модел, 3) рад са математичким моделом са циљем добијања резултата, 4) тумачење исхода процеса рачунања, 5) процена да ли је резултат одговарајући са аспекта рачуна и ситуације, 6) евалуација добијених резултата.

---

<sup>1</sup> Milana.Dabic@uf.bg.ac.rs

Можемо рећи да је међу текстуалним задацима установљена разлика између оних који подстичу процес моделовања и оних који подстичу „традиционалне” начине решавања. Наиме, традиционални начин решавања претпоставља искључиво препознавање везе између дате проблемске ситуације и математичког израза. При креирању ових задатака, у настојању да се истакне ова веза, долази се до вештачких контекста који описују нереалистичне ситуације. Показало се да овакви задаци подстичу ученике на површно читање формулације проблема и употребу површинских стратегија решавања (De Corte, Verschaffel, 1987; Schoenfeld, 1991; Verschaffel et al., 2000; Van Dooren et al., 2010).

У процесу решавања, ученици не размишљају о контексту проблема, већ искључиво о вредности израза коју треба да добију на основу података из текста (Van Doogen et al., 2010). Ученици који на традиционалан начин решавају задатке њихово решавање своде на одабир аритметичке операције са бројевима датим у проблему без разматрања контекста проблема (Greer, 1993).

Са друге стране, решавање контекстуалних задатака захтева процес моделовања. Задаци засновани на контексту могу да садрже више информација него што је потребно за решавање проблема, или да немају све потребне информације. Екстерна тестирања из математике која се у последње време спровде у Републици Србији такође потенцирају контекстуалне задатке и процес моделовања. Стога ћемо у овом раду анализирати који се аспекти математичког резоновања, знања и процеса моделовања сматрају важним на високим нивоима постигнућа.

### **Захтеви на високом и напредном нивоу постигнућа из математике у TIMSS истраживању**

Најпре ћемо описати основне карактеристике TIMSS тестирања из математике. Тестирање укључује две димензије – димензију садржаја, која дефинише материју која се вреднује и когнитивну димензију која специфицира процес размишљања. У четвртном разреду испитују се садржаји из области Бројева, Геометријских облика и мера и Приказивања података, док су у осмом разреду области проширене областима Алгебре и Вероватноће. Табелом 1 је приказана заступљеност појединих садржаја на тестирању (IEA, 2007).

*Табела 1. Заступљеност различитих математичких области на TIMSS тестирању у четвртном и осмом разреду*

	Садржаји	Проценти
Четврти разред	Бројеви	50%
	Геометријски облици и мере	35%
	Приказивање података	15%
Осми разред	Бројеви	30%
	Алгебра	30%
	Геометрија	20%
	Подаци и вероватноћа	20%

Когнитивни домени који се испитују у четвртој и у осмом разреду су домени *знања, примене и резонувања*. Домен *знања* подразумева познавање математичких концепата и спретност у математичким вештинама и представља основу за решавање проблема. *Примена* подразумева примењивање математике у различитим контекстима, а укључује креирање еквивалентних репрезентација јер су оне основ математичког мишљења и комуникације. У овом домену заступљено је решавање проблема, али је нагласак на познатим и рутинским задацима. *Резонување* укључује логичко, систематско мишљење, интуитивно и индуктивно резонување. Односи се на нове или непознате ситуације које могу бити или реалистичне или чисто математичке. Когнитивне вештине резонувања се сматрају значајним исходом математичког образовања са потенцијалом да утичу на опште способности мишљења. У Табели 2 је дат приказ вештина које припадају одређеном когнитивном домену (IEA, 2007).

Табела 2. Опис когнитивних вештина на различитим нивоима TIMSS тестирања из математике

Домен	Вештина	Опис
Знање	Присећање	Присећање дефиниција, терминологије, својства бројева, јединица мера, геометријских својстава и нотације
	Препознавање	Препознавање бројева, израза, величина и облика. Препознавање еквивалентних форми (нпр. разломака, децимала, процената, различите оријентације једноставних геометријских фигура)
	Класификација/ Уређивање	Класификација бројева, израза, величина и облика са сличним својствима
	Рачунање	Извођење алгоритамских процедура основних рачунских операција, или комбинација са природним бројевима, разломцима, децималним бројевима или целим бројевима; извођење једноставних алгебарских процедура
	Читање података	Читање података са графика, табела, текстова или других извора
	Мерење	Употреба инструмената за мерење и бирање одговарајућих мерних јединица
Примена	Определљивање	Определити се за одговарајуће операције, стратегије и алате за решавање проблема за које постоје уобичајене методе решавања
	Репрезентовање /Моделовање	Приказивање података у табелама или графовима, креирање једначина, неједначина, геометријских фигура или дијаграма које моделују проблемске ситуације и генерисање еквивалентних репрезентација за дат математички ентитет или однос
Резонување	Анализа	Установљавање, описивање или коришћење односа међу бројевима, изразима, величинама и

	геометријским облицима
Интеграција/ Синтеза	Повезивање различитих елемената знања, репрезентација и процедура са циљем решавања проблема
Евалуација	Евалуација алтернативних стратегија решавања и решења при решавању проблема
Закључивање	Доношење валидних закључака на основу стратегија и доказа
Генерализација	Прављење исказа који генералније репрезентују однос и омогућавају његову ширу примену
Образлагање	Осмишљавање математичких аргумената за оправдавање стратегије или решења

Заступљеност когнитивних домена у задацима на TIMSS тестирању приказана је Табелом 3. Може се приметити да око две трећине задатака подразумева примену или резоновање, као и да је у осмом разреду мањи акценат на знању, а већи на резоновању.

*Табела 3. Заступљеност различитих когнитивних нивоа на TIMSS тестирању у четвртој и осмом разреду*

Когнитивни домени	Заступљеност	
	Четврти разред	Осми разред
Знање	40%	35%
Примена	40%	40%
Резоновање	20%	25%

На TIMSS тестирању постоје референтне вредности за четири нивоа постигнућа: ниско, средње, високо и напредно. Описаћемо шта се очекује од ученика осмог разреда на високом и напредном нивоу.

Ученици на високом нивоу постигнућа могу да примене разумевање и знање у разним релативно комплексним ситуацијама. Могу да раде са разломцима, децималним записима, процентима и негативним бројевима и решавају текстуалне задатке са пропорцијама. Раде са алгебарским изразима и линеарним једначинама. Користе геометријска својства при решавању проблема, укључујући површину, запремину и углове. Интерпретирају податке представљене различитим графовима и табелама и решавају једноставне проблеме из вероватноће (IEA, 2007).

На напредном нивоу, ученици могу резонovati са информацијама, извлачити закључке, правити генерализације и решавати нерутинске проблеме. Могу да решавају различите проблеме са разломцима, пропорцијама, процентима и образлагати своје закључке. Могу изражавати генерализације алгебарски и моделовати ситуације. Могу резонovati укључујући геометријске фигуре у решавању проблема. Такође могу да резонују са подацима из неколико извора или непознатих репрезентација у решавању комплекснијих проблема.

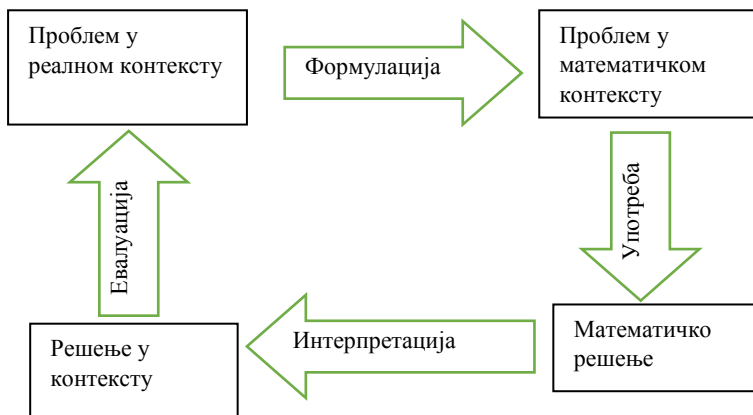
Како бисмо ближе описали захтеве на напредном нивоу постигнућа, представићемо један од примера задатака из алгебре(IEA, 2007):

*До зна да хемијска оловка кошта 1 зед више од графитне. Његов пријатељ је купио две хемијске и три графитне и платио је 17 зед. Колико зед ће бити потребно да До купи једну хемијску и две графитне оловке? Прикажи поступак.*

### Захтеви на високим нивоима постигнућа у математици на PISA истраживању

PISA истраживање у математици вреднује „капацитет ученика у формулисању, коришћењу и интерпретирању математике у различитим контекстима” (OECD, 2016: 176). Претпоставља се да успех на PISA тесту могу постићи ученици који резонују математички и користе математичке концепте и процедуре у предвиђању феномена. Писменост коју мери не односи се на репродукцију садржаја, већ на „успешност у екстраполацији оног што знају и примени математичког знања у новим и непознатим ситуацијама. Ово је рефлексија модерних друштава и радних места, које цене успешност не у оног што људи знају, него оно што могу урадити са тим што знају” (OECD, 2012: 37).

Математички задаци на овом тестирању јесу проблеми у реалном контексту, а основне математичке способности које се овим задацима вреднују су комуникација, репрезентација, осмишљавање стратегија, математизација, резонување и аргументање, употреба симбола, формалног и техничког језика и операција, употреба математичких алата. Главни процеси описани су схемом (Слика 1).



Слика 1. Процеси при решавању контекстуалних проблема (OECD, 2012)

Садржаји који су употребљавани на тесту груписани су у три категорије: квантификације, неочекиваности и подаци, простор и облик. У квантификације спадају мере, пребројавање, величине, јединице, индикатори, релативне величине, нумеричке законитости и шаблони, различите репрезентације бројева, осећај за број, ментално рачунање, процене и оцењивање оправданости решења. Категорија неочекиваности и подаци укључују два аспекта. Први је идентификација и сумирање порука које произилазе из скупова података који су различито представљени. Вероватноћа и статистика укључује овај аспект. Други аспект је схватање утицаја неке варијабилности, тј. разматрање привремених и сталних веза међу објектима и околностима у системима у којима елементи утичу једни на друге. Последња категорија простор и облик обухвата својства објеката, позиције и оријентације, репрезентације објеката, правилности, декодирање и енкодирање визуелних информација, навигацију и динамичку интеркцију са облицима и њиховим репрезентацијама. Ова категорија превазилази оквире геометрије и обухвата просторну визуелизацију, мерење и алгебру. Подразумева разумевање перспективе, мапа, трансформисање облика са и без технологије, интерпретирање тродимензионалних облика из различитих перспектива и конструисање репрезентација облика.

Решавање задатака на овом тесту почиње са проблемом у контексту који треба трансформисати у математички проблем. Затим треба употребити математичке концепте, операције, чињенице и резоновање да би се стигло до математичког решења које треба интерпретирати у контексту (Слика 1). Међутим, сви набројани процеси нису неопходни у сваком од задатака. Они су класификовани по доминантном процесу у три категорије: 1) формулисање ситуације математички; 2) употребљавање математичких концепата, чињеница, процедура и резоновања; 3) интерпретирање, примену и евалуацију математичких исхода.

Релативна тежина задатка одређена је односом ученика који су одговорили тачно на свако питање у задатку. Релативно постигнуће ученика је одређено односом тачно урађених питања. На скали која је одређена тежином сваког задатка могуће је описати ниво постигнућа ученика. Скала има шест нивоа (Табела 4). Уколико је постигнуће ученика између нивоа 3 и 4 то значи да се очекује да ће ученик решити задатке нивоа 1, 2 и 3, али не и задатке нивоа 4, 5 и 6.

*Табела 4. Веза између тежине задатака и успешности ученика на скали математичке писмености*

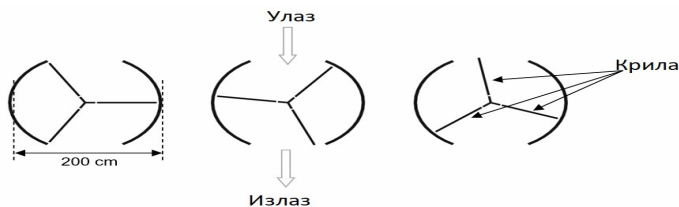
Нивои		
Високи	Задатак нивоа 6	Ученик има високо постигнуће
	Задатак нивоа 5	
Средњи	Задатак нивоа 4	Ученик има средње постигнуће
	Задатак нивоа 3	
Ниски	Задатак нивоа 2	Ученик има ниско постигнуће
	Задатак нивоа 1	

Пошто се у овом раду бавимо захтевима на високим нивоима постигнућа, описаћемо шта се од ученика очекује на нивоима пет и шест. На петом нивоу, претпоставља се да ученик може развијати моделе и радити са њима у комплексним ситуацијама, идентификовати ограничења и постављати претпоставке. Такође се претпоставља да може детектовати, поредити и евалуирати стратегије решавања проблема. Може користити широк спектар начина размишљања, користити пригодне репрезентације, симболичке и формалне карактеризације. Ученици на овом нивоу такође могу дати рефлексију на свој рад, формулисати и комуницирати своје интерпретације и резонувања. На највишем, шестом нивоу, претпоставља се да ученик може да концептуализује, генерализује и користи информације на основу својих истраживања и моделовања проблемских ситуација и може да користи своје знање у релативно не-стандардним контекстима. Такође, може да повеже различите изворе информација и репрезентација и да флексибилно прелази са једне на другу. У новим ситуацијама може да примени разумевање ових информација и искористи их уз овладане симболичке и формалне математичке операције и везе при развијању нових приступа и стратегија. Може да размишља о својим акцијама, формулише их и прецизно комуницира, да да рефлексије на своја открића, интерпретације, аргументе и да размишља о њиховој пригодности оригиналним ситуацијама.

Илустроваћемо захтеве на највишем, шестом нивоу постигнућа примером (Слика 2).

## КРУЖНА ВРАТА

Кружна врата се састоје од три „крила“ која се okreћу унутар кружног простора. Унутрашњи пречник тог простора је 2 метра (200 центиметара). Три крила деле простор на три једнака дела. На скици испод приказана су крила кружних врата у три различита положаја, гледана одозго.



### Питање 2: КРУЖНА ВРАТА

Два отвора на вратима (лукови означени тачкицама на скици) су исте величине. Ако су ови отвори исувише широки, крила не би могла да затворе простор и ваздух би онда могао слободно да циркулише између улаза и излаза, изазивајући губитак топлоте или нежељени раст температуре. Ово је приказано на скици.



Колика је највећа дужина лука у центиметрима (cm) коју сваки отвор на вратима може да има, а да ваздух не може слободно да циркулише између улаза и излаза?

Највећа дужина лука: \_\_\_\_\_ cm

Слика 2. Пример задатка на највишем нивоу PISA тестирања из математике (OECD, 2012)

## Резултати ученика из Републике Србије на високим нивоима постигнућа

У овом поглављу упоредићемо резултате које су ученици постигли на TIMSS тестирању из математике у осмом разреду и PISA тестирању. У PISA истраживању учествују ученици старости од 15 година и 3 месеца до 16 година и 2 месеца тако да поређење резултата ова два теста има смисла. Последња година у којој су ученици осмог разреда из Републике Србије учествовали у TIMSS тестирању је 2007, тако да ћемо искористити податке прикупљене те године. Са друге стране, последњи подаци о ученицима у Србији PISA истраживања су из 2012. године. Иако су ови резултати временски удаљени и нема пресека узорака, можемо их користити илустративно. Треба нагласити да



је између 2003. и 2007. године постојао тренд раста у резултатима ученика из Србије на TIMSS тестирању из математике, али да наредних година ученици осмог разреда нису учествовали, па не можемо даље пратити овај тренд.

На TIMSS тестирању у Србији 2007. године, ученици су имали просек од 486 поена, што је значајно испод просека скале (500 поена) и по просеку били су на 18. месту од 48 држава које су учествовале. Референтна вредност за достизање високог нивоа постигнућа из математике је 550, а за достизање напредног нивоа 625 поена. Напредни ниво достигло је 5% ученика, док је високи ниво достигло 19% ученика.

На PISA тестирању ученици су имали просек од 449 поена што је између 45. и 48. места од укупно 65 држава односно региона које су учествовали у истраживању. Процент ученика који могу да реше задатке на петом и шестом нивоу (просек OECD држава) је редом, 12,6% и 3,3%. Дакле, око 16% ученика тачно је решило задатке на петом и шестом нивоу. У Републици Србији, укупно је испод 5% ученика успешно решавало задатке са ова два нивоа.

### Дискусија и закључак

Према претходном, два тестирања из математике која су представљена имају различит фокус, али се могу препознати поједини аспекти који оба вреднују. PISA тестирање подразумева употребу процеса моделовања у сваком од задатака, без обзира на ниво тежине на којем се задатак налази. То се може уочити разматрањем корака процеса моделовања који су описали Блум и Лајс (Blum, Leiss, 2007) и анализирањем Слике 1, која представља процесе при решавању PISA задатака. Резултати који су остварили ученици из Србије 2007. на TIMSS, односно 2012. године на PISA тестирању, не могу се поредити јер нису из исте године, али ова тестирања су разматрана јер у њима учествују ученици сличног узраста. Индикативно је да су ученици били боље ранжирани на TIMSS него на PISA тестирању, што може имплицирати да се процесу моделовања не придаје довољно пажње у настави математике. У настави су доминантни „традиционални“ задаци који доводе до проблема раније описаних у литератури (De Corte, Verschaffel, 1987; Schoenfeld, 1991; Verschaffel et al., 2000; Van Dooren et al., 2010).

Ако разматрамо садржаје који се вреднују на TIMSS односно PISA истраживању, видећемо да TIMSS тестирање укључује области које су ученицима блиске – наиме, у осмом разреду то су бројеви, алгебра, геометрија и вероватноћа. Бројевима и алгебри се у осмом разреду посвећује највећа пажња, што кореспондира са програмом у Републици Србији (Табела 1). Слично је у четвртном разреду где се бројевима посвећује највише пажње. Са друге стране, садржаји на PISA тестирању претпостављају примену и повезивање математичких знања и нису у директној вези са нашим програмом математике. Као неке од примера можемо навести нумеричке законитости и шаблоне, осећај за број, ментално рачунање, процене, оцењивање оправданости решења, разумевање перспективе, разумевање мапа,

трансформисање облика, итд. Стога, није изненађујуће што је постигнуће ученика лошије на PISA него на TIMSS тестирању.

Још једна од карактеристика која разликује ова два тестирања јесу когнитивни процеси приликом решавања задатака. Наиме, TIMSS тест садржи 35% задатака који вреднују математичка знања, док остали задаци вреднују примену и резонување. Као што је приказано у Табели 2, ова два домена укључују одређивање за стратегију решавања проблема, репрезентовање односно моделовање проблема, анализу односа међу подацима, интеграцију података из више извора, евалуацију решења, доношење валидних закључака на основу стратегија и доказа, генерисање исказа који репрезентују однос и осмишљавање математичких аргумената за оправдавање стратегије или решења. Са друге стране, PISA тест нема задатке који искључиво вреднују математичка знања. Задаци на PISA тесту се категорички према доминантном процесу у циклусу моделовања на формулисање ситуације математички, употребљавање математичких концепата, чињеница, процедура и резонувања и интерпретирање, примену и евалуацију математичких исхода. Уколико тражимо аспекте које оба теста вреднују, видимо да идеологија иза PISA задатака има заједничких тачака са TIMSS задацима примене и резонувања.

Анализу захтева на високим нивоима постигнућа започећемо од разматрања постигнућа ученика из Србије на овим нивоима. Наиме, последње године када су тестирани ученици из осмог разреда у TIMSS истраживању, висок ниво постигнућа остварило је 19% ученика, док је напредни ниво достигло 5% ученика. Са друге стране, последњи резултати PISA истраживања у математици показали су да је укупно мање од 5% ученика достигло напредне нивое (пети и шести ниво). Уколико погледамо описе захтева на овим нивоима, можемо видети да напредни ниво на TIMSS тестирању кореспондира са напредним нивоима на PISA тестирању. Виши ниво TIMSS тестирања има другачије захтеве. На овом нивоу TIMSS теста из математике дефинисана су математичка знања која ученици треба да покажу, и истакнуто је да та знања и разумевање треба да примене у релативно комплексним ситуацијама.

Напредни ниво TIMSS тестирања укључује процесе који се вреднују и на напредним нивоима PISA тестирања, а то су генерализација, моделовање комплексних ситуација, образлагање закључака, рефлексција, комуникација својих акција, коришћење непознатих репрезентација и резонување са подацима из неколико извора. Стога није изненађујуће поклапање процента ученика који имају постигнуће на напредним нивоима на ова два тестирања, иако је њихова временска удаљеност пет година. Низак проценат ученика који су остварили напредна постигнућа указује да поменути процесима треба посветити више пажње у настави. За почетак, у настави се могу размотрити примери задатака са ових тестирања, а касније и осмишљавати слични задаци при чијем би се решавању користили ови процеси.

## Литература:

- Blum, W., and Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.): *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics*. Chichester: Horwood, 222–231.
- De Corte E., and Verschaffel L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research of Mathematics Education*, 18, 363–381.
- Greer, B. (1993). The modeling perspective on word problems, *Journal of Mathematical Behavior*, 12(3), 239–250.
- IEA (2007), *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*, TIMSS&PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- OECD (2016), *PISA 2015 (Volume I): Excellence and Equity in Education*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014)*, PISA, OECD Publishing.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, and J. W. Segal (Eds.): *Informal reasoning and education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 311–343.
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, No 1, 1–36.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., and Verschaffel, L. (2010). Just Answering... or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems, *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 20–35.
- Verschaffel, L., Greer, B., and De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

**Milana Dabic Boricic**

Teacher Training Faculty in Belgrade

### CRITERIA FOR HIGH LEVELS OF ACHIEVEMENT ON MATHEMATICS EXTERNAL TESTING (TIMSS AND PISA)

**Summary:** Mathematical literacy evaluated by PISA exceeds the framework of knowledge needed exclusively for learning mathematics as abstract science. It includes the ability to interpret mathematics in various contexts, to include mathematical reasoning and to use mathematics in explaining and predicting phenomena. On the other hand, one of the aims of TIMSS assessment is to enable international comparison and hence to improve practice in teaching and learning of mathematics. As these two assessments have different goals, there are also differences in the descriptions of the proficiency needed for high level of achievement. PISA criteria are related to the use of mathematical models, strategies of problem solving, use of different mathematical representations, communication of the reasoning, etc. TIMSS criteria are closer related to content knowledge, but they also include cognitive skills and strategies. The objective of this paper is to describe and to compare these demands and to analyze the students' achievement on high levels in Serbia.

**Key words:** mathematic testing, high achievement, mathematical literacy, TIMSS, PISA.